Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
1. Klausur

Donnerstag, 6. Mai 2021 (Nachmittag)

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Abschnitt A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Abschnitt B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

2221 – 7126

15 Seiten

16EP01

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 4]

Betrachten Sie zwei aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen n und $n+1$.

Zeigen Sie, dass die Differenz ihrer Quadrate gleich der Summe dieser beiden ganzen Zahlen ist.

2. [Maximale Punktzahl: 7]

Lösen Sie die Gleichung $2\cos^2 x + 5\sin x = 4$, $0 \le x \le 2\pi$.

3. [Maximale Punktzahl: 5]

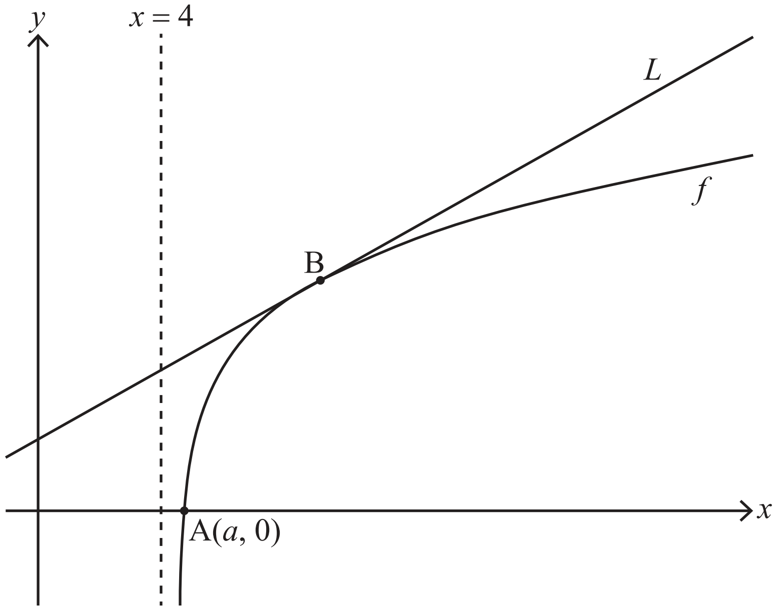
In der Entwicklung von $(x+k)^7$, mit $k \in \mathbb{R}$, ist der Koeffizient des x^5-Terms 63.

Finden Sie die möglichen Werte von k.

4. [Maximale Punktzahl: 9]

Betrachten Sie die Funktion f mit $f(x) = \ln(x^2 - 16)$ für $x > 4$.

Das folgende Diagramm zeigt einen Teil des Graphen von f, der die x-Achse im Punkt A mit Koordinaten $(a, 0)$ schneidet. Die Gerade L ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt B.



(a) Finden Sie den genauen Wert von a. [3]

(b) Die Steigung von L ist $\frac{1}{3}$. Finden Sie damit die x-Koordinate von B. [6]

. . . .

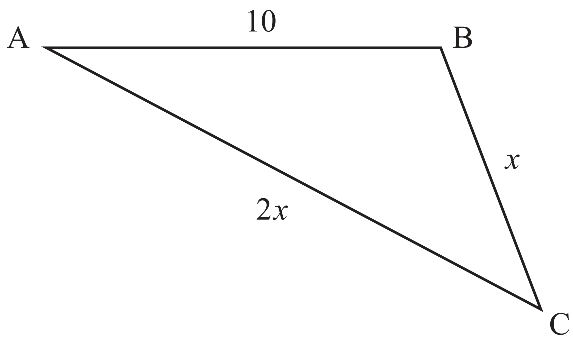
5. [Maximale Punktzahl: 4]

Gegeben sind zwei beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ungleich dem Nullvektor. Zeigen Sie, dass gilt: $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 \, |\boldsymbol{b}|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$.

6. [Maximale Punktzahl: 7]

Die folgende Zeichnung zeigt das Dreieck ABC, mit $\mathrm{AB} = 10$, $\mathrm{BC} = x$ und $\mathrm{AC} = 2x$.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



Es gilt: $\cos \hat{\mathrm{C}} = \frac{3}{4}$. Finden Sie damit den Flächeninhalt des Dreiecks.

Stellen Sie Ihre Antwort in der Form $\frac{p\sqrt{q}}{2}$ dar, mit p, $q \in \mathbb{Z}^{+}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

7. [Maximale Punktzahl: 5]

Die kubische Gleichung $x^3 - kx^2 + 3k = 0$ mit $k > 0$ habe die Lösungen α, β und $\alpha + \beta$.

Es gelte: $\alpha\beta = -\frac{k^2}{4}$. Finden Sie damit den Wert von k.

8. [Maximale Punktzahl: 8]

Die Geraden l_1 und l_2 haben die folgenden Vektorgleichungen, mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$l_1 : \boldsymbol{r}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$l_2 : \boldsymbol{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) Zeigen Sie, dass sich l_1 und l_2 nicht schneiden. [3]

(b) Finden Sie den kürzesten Abstand zwischen l_1 und l_2. [5]

9. [Maximale Punktzahl: 7]

Finden Sie unter Verwendung der Substitution $u = \sin x$ das folgende Integral:

$$\int \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - \sin x - 2} \mathrm{d}x .$$

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

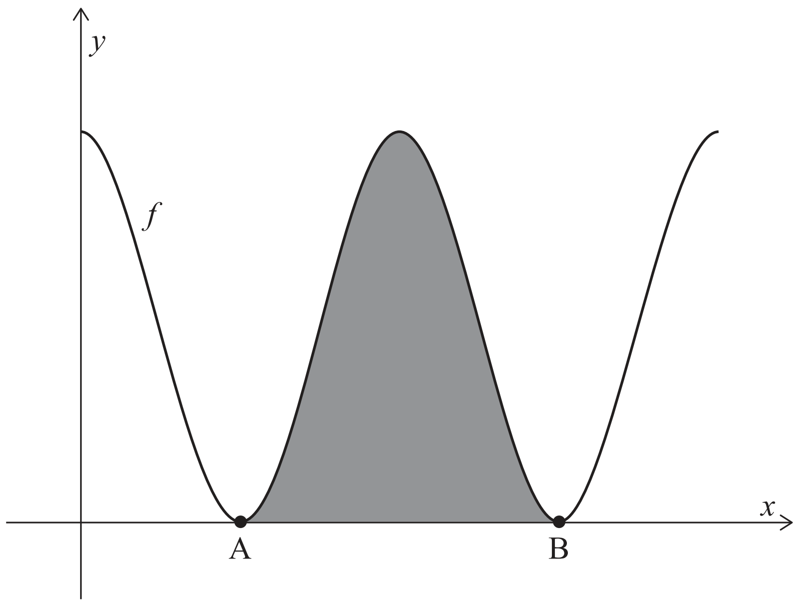
Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 15]

Betrachten Sie die Funktion f mit $f(x) = 6 + 6\cos x$, für $0 \le x \le 4\pi$.

Das folgende Diagramm zeigt den Graphen von $y = f(x)$.



Der Graph von f berührt die x-Achse an den Punkten A und B, wie dargestellt. Die schattierte Fläche wird begrenzt vom Graphen von $y = f(x)$, der x-Achse sowie den Punkten A und B.

(a) Finden Sie die x-Koordinaten von A und B. [3]

(b) Zeigen Sie, dass der Inhalt der schattierten Fläche 12π beträgt. [5]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

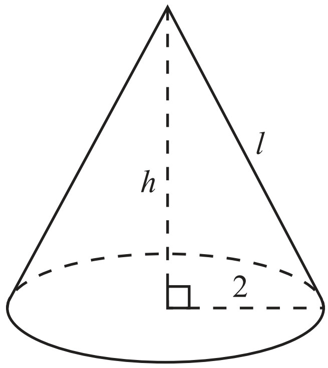
Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 10)

Der senkrechte Kegel in der folgenden Zeichnung hat eine Gesamtoberfläche von 12π, wie die schattierte Fläche im vorherigen Diagramm.

Der Kegel hat einen Grundradius von 2, die Höhe h und die Höhe der Seitenlinie l.

Zeichnung nicht maßstabsgerecht



(c) Finden Sie den Wert von l. [3]

(d) Finden Sie unter Nutzung der Vorarbeit das Volumen des Kegels. [4]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 20]

Die Beschleunigung a in ms^{-2} eines sich horizontal bewegenden Körpers ist zum Zeitpunkt t Sekunden, $t \ge 0$, gegeben durch $a = -(1 + v)$, wobei v in ms^{-1} die Geschwindigkeit des Körpers ist und $v > -1$ gilt.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Körper im Ursprung O und hat die Anfangsgeschwindigkeit $v_0\,\mathrm{ms}^{-1}$.

(a) Zeigen Sie durch Lösen einer geeigneten Differentialgleichung, dass die Geschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt t sich durch $v(t) = (1 + v_0)\mathrm{e}^{-t} - 1$ darstellen lässt. [6]

(b) Ausgehend vom Ursprung O bewegt sich der Körper in positiver Richtung, bis er den größten Abstand zu O erreicht. Anschließend bewegt sich der Körper zu O zurück.

Sei s (in Meter) die Entfernung des Körpers von O und $s_{\max}$ seine größte Entfernung von O.

(i) Zeigen Sie, dass die Zeit T, die der Körper bis zum Erreichen von $s_{\max}$ braucht, die Gleichung $\mathrm{e}^{T} = 1 + v_0$ erfüllt.

(ii) Finden Sie durch Lösen einer geeigneten Differentialgleichung und unter Verwendung des Ergebnisses aus Teil (b)(i) einen Ausdruck für $s_{\max}$, der von v_0 abhängig ist. [7]

Sei $v(T - k)$ die Geschwindigkeit des Körpers k Sekunden, bevor er $s_{\max}$ erreicht. Dann gilt:

$$v(T - k) = (1 + v_0)\mathrm{e}^{-(T - k)} - 1 .$$

(c) Zeigen Sie unter Verwendung des Ergebnisses aus Teil (b)(i), dass $v(T - k) = \mathrm{e}^{k} - 1$ gilt. [2]

Sei nun analog $v(T + k)$ die Geschwindigkeit des Körpers k Sekunden, nachdem er $s_{\max}$ erreicht hat.

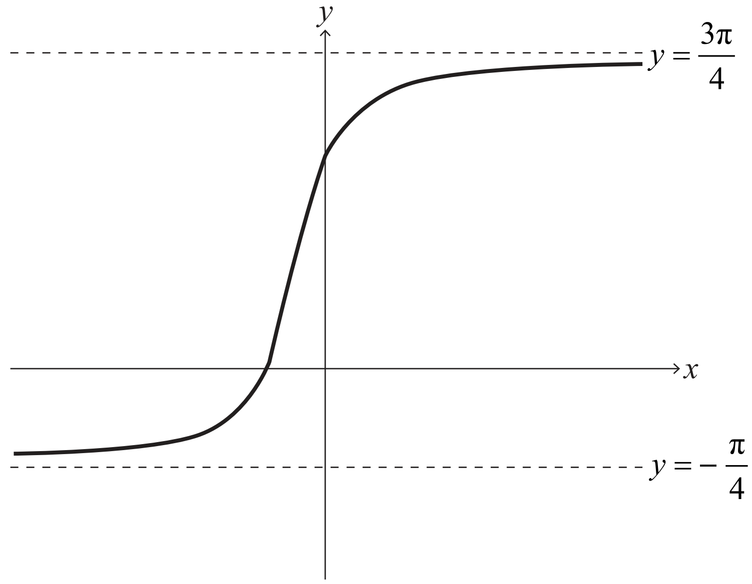
(d) Deduzieren Sie einen ähnlichen Ausdruck für $v(T + k)$ abhängig von k. [2]

(e) Zeigen Sie unter Nutzung der Vorarbeit, dass $v(T - k) + v(T + k) \ge 0$. [3]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 19]

Das folgende Diagramm zeigt den Graphen von $y = \arctan(2x+1) + \frac{\pi}{4}$ für $x \in \mathbb{R}$, mit Asymptoten bei $y = -\frac{\pi}{4}$ und $y = \frac{3\pi}{4}$.



(a) Beschreiben Sie eine Abfolge von Transformationen zum Überführen des Graphen von $y = \arctan x$ in den Graphen von $y = \arctan(2x+1) + \frac{\pi}{4}$ für $x \in \mathbb{R}$. [3]

(b) Zeigen Sie, dass $\arctan p + \arctan q \equiv \arctan\left(\frac{p+q}{1-pq}\right)$ mit p, $q > 0$ und $pq < 1$. [4]

(c) Validieren Sie, dass $\arctan(2x+1) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{\pi}{4}$ für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. [3]

(d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion und mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil (b) die Gültigkeit von: $\sum_{r=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2r^2}\right) = \arctan\left(\frac{n}{n+1}\right)$ für $n \in \mathbb{Z}^+$. [9]

Quellen:

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.